10-11-21 <u>6η Διάλεξη</u>

Ορισμός: Ο X λέγεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy από τον X συγκλίνει (στον X)

$\to d(x,y)=|x-y|$

Πχ $((0,1), |\cdot|)$ όχι πλήρης διότι αν πάρω την ακολουθία $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq (0,1)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, άρα είναι Cauchy $\boxed{\text{αλλά}}$

$\frac{1}{n+1} \to 0 \notin X$

Θεώρημα: Έστω (X,d) πλήρης, $Y \subseteq X$ τότε (Y,d) αν-ν Y κλειστό

Απόδειξη

- Έστω ότι Y κλειστό και έστω $\{x_n\} \subseteq Y$, $\{x_n\}$ Cauchy

$\xRightarrow{X = \text{πλήρης}} \exists\, x \in X$ τ.ω $x_n \to x$

$\xRightarrow{Y \text{ κλειστό}} x \in Y \Longrightarrow \{x_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο του Y.

- Αντίστροφα: Έστω ότι $\forall \{x_n\} \subseteq Y$, $\{x_n\}$ Cauchy $\exists$ $x \in Y$ τ.ω $x_n \to x$
  Θέλω ν.δ.ο Y κλειστό
  Έστω $\{y_n\} \subseteq Y$ τ.ω $y_n \to y \in X$
  Αρκεί ν.δ.ο $y \in Y$
  Όμως, $Y \subseteq X$ και
  $\{y_n\}$ συγκλίνει $\Longrightarrow \{y_n\}$ Cauchy

y πλήρης $\Longrightarrow$ $y \in Y$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A \subseteq X$, $\{A_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\{A_i\}_{i \in I}$ λέγεται κάλυψη του A αν $\bigcup_{i \in I} A_i \supseteq A$

* Η $\{A_i\}$ λέγεται ανοιχτή κάλυψη του A αν επιπλέον A_i ανοιχτό $\forall i \in I$

<u>Ορισμός</u>: Αν $J \subseteq I$ και $\{A_j\}_{j \in J}$ είναι κάλυψη του A τότε η $\{A_j\}_{j \in J}$ λέγεται υποκάλυψη του A.

<u>Ορισμός</u>: Το A λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη

<u>Πρόταση</u>: Αν A συμπαγές τότε A φραγμένο

<u>Απόδειξη</u>

$\{B(x,1) : x \in A\}$ ανοιχτή κάλυψη του A $\xRightarrow{A \text{ συμπαγές}}$

$\exists\, x_1, \ldots, x_n \in A$ τ.ω $A \subseteq \underbrace{\bigcup_{i}^{n} B(x_i,1)}_{\text{φραγμένο}}$ (αυτό πρέπει να το δείξεις πρώτα)

Άρα A φραγμένο

<u>Θεώρημα</u>: Το A είναι συμπαγές αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq A$, $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακ. της $\{x_n\}$ και $x \in A$ τ.ω $x_{k_n} \to x$.

Ειδικότερα, αυτό δείχνει ότι κάθε συμπαγές είναι κλειστό

Πόρισμα 1: Α συμπαγές $\Rightarrow$ κλειστό ⊕ φραγμένο

⊕ Το αντίστροφο ισχύει στον $\mathbb{R}^n$ με την ευκλείδια. Μπορείς να βρεις και άλλους χώρους αλλά γενικά δεν ισχύει.

Πόρισμα 2: Α συμπαγές, $B \subseteq A$, Β κλειστό $\overset{B}{\Rightarrow}$ Συμπ.
$\not\Leftarrow$

Πχ (X, d)
$\downarrow$ $\hookrightarrow d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
Άπειρο

Θα υπολογίσω $B(x, 1) = \{y \in X : d(x,y) < 1\} =$

$= \{x\}$ διότι $d(x,y) = 0$

Αυτό είναι κλειστό ⊕ φραγμένο.
Μια ανοιχτή κάλυψη είναι $\{B(x,1) \ x \in X\} = \{\{x\} : x \in X\}$
Όμως, δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη
Άρα <u>ΟΧΙ</u> ΣΥΜΠΑΓΕΣ

$\Rightarrow$ Αυτό διότι X άπειρο.
Αν ήταν πεπερασμ.
θα υπήρχε.

Θεώρημα: Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές

$\exists \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ (αριθμ. σύνολο) $\subseteq X$ τω
να είναι πυκνό στον X.

Θεώρημα Lind.: Έστω (X, d) $\boxed{\text{διαχωρίσιμος}}$ μ. χ.
Κάθε ανοιχτή κάλυψη του X έχει τοπολ. αριθμήσιμη υποκάλυψη.

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{U}$ ανοιχτή κάλυψη του $X \neq \emptyset$

Έστω $U_0 \in \mathcal{U}$

Ορίζω την αρ. υποκάλυψη ως εξής:

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}_+$. Αν $U \in \mathcal{U}$ τω $U \supseteq B(d_n, q)$

Θέτω $U(n,q) = U$. Αλλιώς θέτω $U(n,q) = U_0$

Θ.δ.ο είναι αν. κάλυψη του X και $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ q \in \mathbb{Q}}} U(n,q) = X$

Έστω $x \in X$. Αρκεί ν.δ.ο $\exists\, n, q$ τω $x \in U(n,q)$

Αρκεί ν.δ.ο $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}_+$ τω $x \in B(d_n, q)$ και $B(d_n, q) \subseteq$ σε κάποιο $U \in \mathcal{U}$

Έχουμε τις εξής διαπιστώσεις:

- $\exists\, U_x \in \mathcal{U}$ τω $U_x \ni x$
- $\exists\, n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}_+$ τω $x \in B(d_n, q)$ τω $q < r_x/2$ αφού το $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό

Έτσι, έχω:

$$U_x \ni x \underset{\text{ανοιχτό}}{\overset{U_x}{\Longrightarrow}} \exists\, r_x > 0 : B(x, r_x) \subseteq U_x$$

Έστω $y \in B(d_n, q)$. Παίρνω την απόσταση

$$d(x,y) \leq d(x, d_n) + d(d_n, y) < q + q = 2q < r_x$$

Άρα η μπάλα $B(d_n, q) \subseteq B(x, r_x) \subseteq U_x$

Ορισμός: Έστω 2 μ.χ. οι (X,d), (Y,ρ) με $f : X \to Y$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ τ.ω $\forall x \in B(x_0, \delta)$ να ισχύει $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

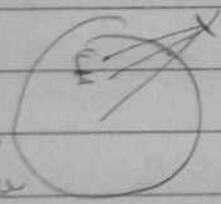
Η f είναι συνεχής στον X αν είναι συνεχής στο x_0, $\forall\, x_0 \in X$.

<u>Ορισμός</u>: Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στον X αν $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ (εξαρτάται από το ε αλλά όχι από το x_0) τ.ω $\forall\, x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$ να ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

<u>Θεώρημα</u>: Αν ο X είναι συμπαγής και f συνεχής τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής (όπως λέγαμε στον Απειρ. για κλειστά ⊕ φραγμένα). Επίσης, τότε η f είναι φραγμένη

[εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω συνεχούς f είναι συμπαγές σύνολο

<u>Ορισμός</u>: Έστω $x \in X$, $E \subseteq X$. Η απόσταση του x από το E ορίζεται: $d(x,E) = d(E,x) = \inf\{ d(x,y) : y \in E \}$.



Επιλέγω την μικρότερη η inf

* Αν $x \in E \Rightarrow d(x,E) = 0$.

* Το αντίστροφο δεν ισχύει διότι μπορεί να είναι στο σύνορο.

↳ Πχ. $d((0,1), 1) = 0$ αλλά $1 \notin E$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $E \subseteq X$ και $x \in X$ τότε:

(i) Αν E συμπαγές τότε $\exists\, y \in E$ τ.ω $d(x,y) = d(x,E)$

(ii) Αν E κλειστό τότε $x \in E \iff d(x,E)$

Απόδειξη

Και για τα 2 σκέλη $\exists \{x_n\} \subseteq E$ τ.ω $d(x_n,x) \to d(x,E)$

(i) $\exists \{x_{k_n}\}$ υπακ. την $\{x_n\}$ τ.ω $x_{k_n} \to y \in E$
λόγω συμπάγειας $\Rightarrow d(x_{k_n}, x) \to d(y, x)$
$\Rightarrow d(x,E) = d(x,y)$

(ii) Έστω ότι $x \notin E \Rightarrow x \in E^c \xRightarrow[\text{ανοιχτό}]{E^c} \exists r>0,\ B(x,r) \subseteq E^c$. Έστω $y \in E \xRightarrow{B(x,r) \subseteq E^c} y \notin B(x,r) \Rightarrow$
$d(x,y) \geq r \Rightarrow \forall\ y \in E,\ d(x,y) \geq r \Rightarrow \underbrace{\inf\{d(x,y) : y \in E\}}_{= d(x,E)} \geq r > 0$ Άτοπο

Πρόταση: $\emptyset \neq E \subseteq X$. Τότε, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = d(x,E)$ είναι ομ. συνεχής.

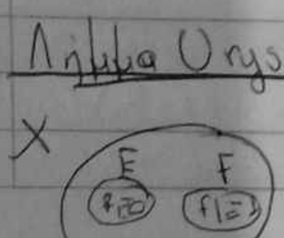
Απόδειξη: Έστω $\varepsilon>0$ και $x,y \in X$ με $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} (=\delta)$
$f(x) = \inf\{d(x,z) : z \in E\} \Rightarrow \exists\, a \in E$ τ.ω
$d(x,a) < d(x,E) + \varepsilon/2$

Ομοίως $\exists\, b \in E$ τ.ω $d(y,b) < d(y,E) + \varepsilon/2$

$f(y) = d(y,E) \leq d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x,E) + \frac{\varepsilon}{2} = d(x,E) + \varepsilon = f(x) + \varepsilon \Rightarrow f(y) - f(x) < \varepsilon$

Ομοίως, $f(x) - f(y) < \varepsilon$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Άρα, ομ. συν.

Λήμμα Urysohn: Έστω $E, F \subseteq X$ κλειστά και ξένα
Τότε $\exists f : X \to [0,1]$ τ.ω
(i) f συνεχής (ii) $f|_E \equiv 0$ (iii) $f|_F \equiv 1$



Απόδειξη

Ορίζω μια $f: X \to \mathbb{R}_+$ τ.ω $f(x) = \frac{d(x,E)}{d(x,E) + d(x,F)}$. Τότε έχω:

- $f(x)$ συνεχής
- $0 \leq f(x) \leq 1$
- Αν $\exists\, x \in X$ τ.ω $d(x,E) + d(x,F) = 0 \Rightarrow d(x,E) = d(x,F) = 0$

E, F κλειστά

$\Rightarrow$ $x \in E$ και $x \in F \Rightarrow E \cap F \neq \emptyset$ άτοπο

$\Rightarrow$ $d(x,E) + d(x,F) > 0 \quad \forall\, x \in X$

- Αν $x \in E \Rightarrow d(x,E) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
- Αν $x \in F \Rightarrow d(x,F) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

Ορισμός: Έστω $f: X \to \mathbb{R}$. Φορέας supp(f)) της f ορίζεται:

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

support $\Leftrightarrow$ κλειστότητα

Ορισμός: (X,d) λέγεται τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος αν $\forall\, x \in X$, $\exists\, r_x > 0$ τ.ω $B(x, r_x)$ συμπαγές.

Πρόταση: Αν (X,d) συμπαγής, $F \subseteq X$, F κλειστό τότε F συμπαγές.

Πχ- τοπικά συμπ. ≠ X : (X,d) με X άπειρο και $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ Θ.δ.ο είναι τοπικά συμπαγής.

$B(x,1) = \{x\} \Rightarrow \overline{B(x,1)} = \{x\}$ συμπ.

Ασκ. για το σπίτι: $C([0,1])$ = το σύνολο όλων των συνεχών συν. στο $[0,1]$. Έστω $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ και $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$. Ν.δ.ο $d(f,g)$ είναι νόρμα και εξέτασε αν $(C[0,1], d)$ τοπικά συμπαγής